електроміографічного дослідження тісно пов'язані зі ступенем напруги і розтягування м'язів, а якість виконання фізичних вправ пацієнтом може визначатися болем, що їх супроводжує, або страхом його виникнення. У зв'язку з цим пропонується доповнити електроміографічний комплекс блоками контролю рівня болю і ступеня розгинання м'язів спини. Запропоновано електроміографічну систему для реєстрації електроміограми в спеціальному положенні «човник» з контролем ступеня згинання м'язів спини з паралельною реєстрацією електроенцефалографічного сигналу для контролю рівня болю під час навантаження. Для реєстрації коливань висоти відхилення спини пацієнта в положенні «човник» пропонується використовувати оптопару - електронний пристрій, що складається з випромінювача світла і фотоприймача, що з'єднані оптичним каналом та об'єднаних в загальний пакет. Контроль відхилення спини необхідний для підтримки одного ступеня навантаження під час запису сигналу електроміограми з м'язів поперекового відділу хребта в спеціальному положенні «човник», так як при зменшенні висоти відхилення м'язи пацієнта розслаблюються, а це впливає на характеристики досліджуваного сигналу. У даній статті запропоновано блок-схему біотехнічної електроміографічної системи, яка обладнана контролем рівня болю. Така біотехнічна система дозволить об'єктивно оцінити результати електроміографічного дослідження із паралельним контролем рівня болю та ступеня згинання м'язів спини досліджуваного, щоб оцінити ступінь дисфункції м'язів спини та якість виконуваних терапевтичних і хірургічних заходів.

Ключові слова: *біль в попереку, м'язова втома, оптопара, поверхнева електроміографія, розгинання, пов'язаний з болем страх, рівень болю, електроенцефалографія.*

Рецензент: проф., д-р техн. наук Аврунин О. Г.
Статья поступила 14.02.2019 р.

УДК 004.4'2:51:53:573:61

Скляр О. І., Лінник О. В.

ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ ПРИ ВИВЧЕННІ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В БІОЛОГІЇ ТА МЕДИЦИНІ

Розглянуте використання програмних засобів для отримання аналітичного розв’язку задач математичної фізики в медицині та біології є доцільним для навчального процесу та дослідницької діяльності та може застосовуватись при моделюванні явищ та процесів в різних галузях біомедичної інженерії. Це дозволяє створювати математичні моделі біофізичних явищ та вивчати вплив різних початкових і граничних умов.

Ключові слова: *засіб програмний, розв’язок аналітичний, метод, математична фізика, модель фізико-математична, медицина, біологія.*

Постановка проблеми. У сучасному науковому середовищі значна увага приділяється методам доказової медицини. З цією метою застосовують специфічні математичні моделі об’єктів та процесів у вигляді відповідних математичних рівнянь. Розв’язок цих рівнянь є суттєвим елементом доказової бази в медицині та біології. Отримання саме аналітичного розв’язку, становить значну цінність, як доказ. Освоєння методів аналітичного розв’язку задач математичної фізики становить значні труднощі в процесі підготовки студентів нематематичного профілю, тому використання програмних пакетів, що надають таку можливість є доцільним і перспективним.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Сучасні програмні засоби для розв'язання математичних рівнянь, відомі як системи комп'ютерної математики (СКМ), які поділяють на системи чисельного обчислення та символьні системи [1, 2]. До СКМ чисельного обчислення належать найпростіші Derive (обчислення початкового рівня), Matcad (обчислення середнього рівня). До символьних СКМ слід віднести Matlab (чисельні обчислення з деяким, досить обмеженим, використанням символьних обчислень), Mathematica (символьні обчислення, фірма Wolfram Research Inc. США) та Maple (складні символьні обчислення з деяким використанням чисельних методів у останніх версіях, фірма Waterloo Maple Inc., Канада). Дві останні фірми конкурують між собою, але першість належить програмному продукту Maple.

Мета дослідження. Вивчення методів застосування програмного продукту Maple для аналітичного розв'язання задач математичної фізики, що використовуються в біології та медицині.

Основний матеріал дослідження. В навчальному процесі окрім лекційних та практичних занять доцільним є проведення лабораторно-практичних занять, де студент опановує спеціальний програмний засіб (Maple) та навчається застосовувати його для розв'язання математичних задач, зокрема задач математичної фізики. При цьому він має застосовувати ряд послідовних дій та алгоритмів.

Одним з найперших завдань у математичній фізиці є необхідність визначення типу наявного рівняння та можливості отримання аналітичного розв'язку. Відомо [3, 4], якщо рівняння належить до класу рівнянь математичної фізики та може бути зведеним до так званої канонічної форми, наприклад, шляхом заміни змінних, то отримання аналітичного розв'язку цього рівняння класичними методами математичної фізики є можливим.

Значний клас математичних моделей біофізичних явищ може бути представленим диференційними рівняннями у частинних похідних другого порядку [3]. Для функції двох змінних рівняння матиме вид:

$$A_{11}(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+A_{12}(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}+A_{21}(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}+A_{22}(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+$$
$$+B_1(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+B_2(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0, \qquad (1)$$

де $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$ – функції двох змінних (в окремому випадку постійні коефіцієнти), що мають безперервні похідні до другого порядку включно.

Перед застосуванням алгоритму розв'язання заданого рівняння необхідно провести деякі попередні обчислення, що будуть використані в подальшому.

Рівнянню (1) відповідає алгебраїчна квадратична форма:

$$g = A_{11}X^2 + (A_{12}+A_{21})XY + A_{22}Y^2 \qquad (2)$$

де X, Y – деякі змінні;

детермінант якої дорівнює:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22}\text{-}A_{12}A_{21}, \qquad (3)$$

зазвичай $A_{12} = A_{21}$, тоді,

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22\text{-}}A_{12}{}^2. \qquad (4)$$

Тоді зведення диференціального рівняння другого порядку в частинних похідних до канонічної форми можна здійснити за наступним алгоритмом:

1. Задати коефіцієнти диференційного рівняння у вигляді елементів матриці-рядка за допомогою спеціалізованого пакета Maple [5] – **with(LinearAlgebra)**: [пакет лінійної алгебри].
2. Сформувати диференціальне рівняння та визначити його ліву частину за допомогою операторів **diff(*)** і **lhs(*)**.
3. Визначити матрицю коефіцієнтів при старших похідних (**linalg[matrix](2,2,[coeff(*)])**).
4. Обчислити детермінант матриці старших коефіцієнтів (**simplify(linalg[det](*))**).
5. За значенням детермінанта $(\Delta > 0, \Delta = 0, (\Delta < 0)$ слід встановити очікуваний тип диференціального рівняння (еліптичний, параболічний, гіперболічній).
6. Сформувати характеристичне рівняння та знайти розв'язок (**solve(*)**).
7. Визначити характеристики диференціального рівняння.
8. Виконати заміну змінних за визначеними характеристиками в залежності від типу диференціального рівняння.
9. Звести задане диференціальне рівняння до канонічної форми (**PDEtools[dchange](*)=0;**) та порівняти з відомими формами (еліптичного, параболічного або гіперболічного типів);
10. Зробити висновки щодо можливості розв'язання заданого рівняння та його приналежність до певного типу рівнянь.

В процесі заняття студентам пропонується алгоритм приведення до канонічної форми для трьох типів рівнянь з відповідними підходами до заміни змінних. Після цього студенти самостійно виконують індивідуальні завдання з використанням запропонованих прикладів. Такий підхід дозволяє досить легко опанувати аналітичні методи зведення до канонічних форм рівнянь другого порядку у часткових похідних з використанням програмних засобів.

Іншою досить поширеною задачею математичної фізики в медицині та біології є задача про розповсюдження хвиль (наприклад, пульсової). У загальному випадку рівняння поширення коливань має вид:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \nabla * \big(p(x) * \nabla u(x,t)\big) - q(x) * u(x,t) + F(x,t), \tag{5}$$

де $u(x,t)$ – невідома функція, що описує розповсюдження коливань та залежить від n просторових координат (зазвичай $n = 1,2,3$, тобто $x \equiv x_1, x_2, x_3$) і часу t;

$\rho(x), p(x), q(x)$ – коефіцієнти, які визначають властивості середовища, де відбувається хвильовий процес;

$F(x,t)$ – вільний член, що характеризує інтенсивність зовнішнього впливу;

$\nabla \equiv \vec{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial x_3}$ – оператор Гамільтона;

$\nabla * \big(p(x) * \nabla u(x,t)\big) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(p(x)\frac{\partial u(x_i,t)}{\partial x_i}\Big)$ – оператор дії.

Рівняння (5) має безліч розв'язків. Для повного опису хвильового процесу, необхідно, крім самого рівняння, задати початковий стан коливального процесу (*початкові умови*) й умови на межі області, де відбувається коливальний процес (*граничні умови*). Найпростішою з таких задач поширення хвиль є задача Коші, де процес розглядається у необмеженому або напівобмеженому одновимірному просторі (напівпросторі $t > 0$ і початковим умовами при $t = +0$), тобто:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{6}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x). \quad (7)$$

При цьому необхідно, щоб виконувалися умови безперервності і диференціювання функцій зовнішніх впливів і початкових умов.

Аналітичний розв'язок задачі Коші для рівняння поширення коливань у необмеженому одновимірному просторі визначається формулою Д'Аламбера:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi,\tau)d\xi, \quad (8)$$

де $\varphi(x-at)$ – пряма хвиля (хвиля, яка біжить вправо);

$\varphi(x+at)$ – зворотна хвиля (хвиля, яка біжить вліво);

$\psi(x)$ – функція початкової швидкості коливального процесу в інтервалі $(x-at,\ x+at)$; значення $\psi(x)$ за межами цього інтервалу не впливає на визначення $u(x,t)$;

$F(x,t)$ – зовнішній вплив, при $F(x,t) \equiv 0$ рівняння є однорідним і хвильовий процес називають *вільними коливаннями*).

Цей розв'язок є єдиним і безперервно залежить від початкових умов.

Для отримання аналітичного розв'язку однорідного або неоднорідного хвильового рівняння в необмеженому просторі (задача Коші) засобами математичного пакета Maple пропонується наступний алгоритм:

1. Записати хвильове рівняння із заданими початковими умовами (задача Коші) та граничною умовою (для напівобмеженої задачі). На даному етапі певну складність може представляти коректний запис початкової функції. З цією метою слід застосовувати оператор (**piecewise(*)**), що дозволяє задавати функцію частинами, при цьому першим вказується координата, а за нею аналітичний опис функції на заданому відрізку.
2. За допомогою операторів (**solve(*))** отримати розв'язок задачі.
3. Для кращого уявлення фізики процесу можна рекомендувати застосування анімаційного відображення функції $u(x,t)$

Одним з варіантів розв'язку задачі в напівобмеженому просторі є метод аналітичних продовжень. У такому випадку розв'язок надається у вигляді модифікованих формул Д'Аламбера. У цьому випадку розв'язок надається у вигляді падаючої та відбитої від лівого кінця межі хвиль. Розв'язок може бути розривним. Алгоритм розв'язку задачі є той самий.

На лабораторних роботах можуть досліджуватись і задачі більшої складності в деякому обмеженому просторі. Ці задачі досить складні, і для їх розв'язання зазвичай слід застосовувати методи відокремлення змінних.

ВИСНОВКИ

Використання програмних засобів для отримання аналітичного розв'язку задач математичної фізики в медицині та біології є доцільним для навчального процесу та дослідницької діяльності та може застосовуватись майбутніми фахівцями при моделюванні явищ та процесів в різних галузях біомедицини [6-9]. Це дозволяє біомедичним інженерам створювати математичні моделі біофізичних явищ та аналізувати їх поведінку за різних умов теоретично, вивчати вплив різних початкових та граничних умов на поведінку досліджуваного об'єкту чи процесу. Особливу пізнавальну цінність має можливість отримання засобами Maple анімаційного зображення коливального процесу, теплопереносу та інших фізичних і біофізичних явищ, які можуть бути описані рівняннями математичної фізики.

Список використаних джерел:

1. *Нікітенко, О. М.* Maple : розв’язання інженерних та наукових задач : навч. посібник / *О. М. Нікітенко*. – Харків : ХНУРЕ, 2011. – 289 с.

2. *Крохмаль, Т. М.* Використання систем комп’ютерної математики Maple в курсі «Технічна електродинаміка» / *Т. М. Крохмаль, О. М. Нікітенко* // Теорія та методика електронного навчання : зб. наук. праць. – Кривий Ріг, 2012. – Вип. 3. – С. 148–152.

3. *Головенко, В. М.* Методи математичної фізики при моделюванні процесів у біології та медицині в задачах і прикладах : навч. посіб. / *В. М. Головенко*; Харк. нац. ун-т радіоелектроніки. – Харків : ХНУРЕ, 2010. – 168 с.

4. *Кармазін, В. В.* Курс загальної фізики : навч. посібник / *В. В. Кармазін, В. В. Семенець*. – Київ : Кондор, 2008. − 760 с.

5. *Манзон, Б. М.* Maple V. Power Edition / *Б. М. Манзон*. – М. :Филинъ, 1998. –240 с.

6. Построение персонализированной анатомической модели диафрагмы человека / *В. Г. Дуденко, О. Г. Аврунин, М. И. Тымкович, В. В. Куринной* // Експериментальна і клінічна медицина. – 2014. – № 2 (63). – С. 68–70.

7. The Surgical Navigation System with Optical Position Determination Technology and Sources of Errors / O. G. Avrunin, M. Alkhorayef, H. F. I. Saied, M. Y. Tymkovych // Journal of Medical Imaging and Health Informatics. – 2015. – N 5. – P. 689–696.

8. The role of paranasal sinuses in the aerodynamics of the nasal cavities / H. Farouk, E. Abaida, A. Khaleel, O. Avrunin //International Journal of Life Science and Medical Research. – 2012. –Vol. 2, № 3. – P. 52–55.

9. *Ismail Saied, H. F.* An Attempt of the Determination of Aerodynamic Characteristics of Nasal Airways / H. F. Ismail Saied, A. K. Al_Omari, O. G. Avrunin // Image Processing & Communications, challenges 3. – 2011. – AISC 102. – P. 311–322.

10. Ahmad Khaleed Al_Omari Analysis of Changes of the Hydraulic Diameter and Determination of the Air Flow Modes in the Nasal Cavity / *Ahmad Khaleed Al_Omari, Husham Farouk Ismail Saied, O. G. Avrunin* // Image Processing & Communications, challenges 3. – 2011. – AISC 102. –P. 303–310.

Скляр О. И., Линник Е. В.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В БИОЛОГИИ И МЕДИЦИНЕ

Рассматривается использование программных средств для получения аналитических решений задач математической физики в медицине и биологии, что может применяться в учебном процессе и исследовательской деятельности при моделировании явлений и процессов в различных отраслях биомедицинской инженерии. Это позволяет создавать математические модели биофизических явлений и изучать влияние различных начальных и граничных условий.

Ключевые слова: *средство программное, решение аналитическое, метод, математическая физика, модель физико-математическая, медицина, биология.*

Біоінженерія

Skliar O. I., Linnik E. V.

USE OF SOFTWARE IN STUDY OF METHODS OF MATHEMATICAL PHYSICS IN BIOLOGY AND MEDICINE

The questions of mathematical modeling of various phenomena and processes in various branches of biomedical engineering are considered. In the modern scientific environment considerable attention is paid to the methods of evidence-based medicine. For this purpose, specific mathematical models of objects and processes are used in the form of corresponding mathematical equations. The solution of these equations is an essential element of the evidence base in medicine and biology. Obtaining the very analytical solution is a significant value as proof. The development of methods of analytical solution of the problems of mathematical physics is a significant difficulty in the process of preparing non-mathematical students, therefore the use of software packages that provide such an opportunity is expedient and promising. In the educational process, in addition to lectures and practical classes, it is expedient to conduct laboratory and practical classes, where a student acquires a special software tool (Maple) and learns to apply it for solving mathematical problems, in particular problems of mathematical physics. In doing so, he must apply a series of sequential actions and algorithms.

One of the first tasks in mathematical physics is the need to determine the type of existing equation and the possibility of obtaining an analytical solution. Different classes of equations of mathematical physics are considered for solving. Special attention is given to the construction of equations to the canonical form. In laboratory work, problems of greater complexity can be investigated in some limited space. These tasks are quite complex, and to solve them, it is usually necessary to apply methods of separating variables.

The use of software tools for analytical solution of problems of mathematical physics in medicine and biology is considered appropriate for educational process and research activity and can be used for modeling phenomena and processes in various branches of biomedical engineering. This allows to create mathematical models of biophysical phenomena and study the effects of different initial and boundary conditions.

Keywords: *software tool, analytical solution, method, mathematical physics, physics and mathematics model, medicine, biology.*

Рецензент: проф., д-р техн. наук Аврунин О. Г.
Статья поступила 14.02.2019 г.

УДК 004.932:616-006

Аврунин О. Г., Абрамова А. А.

ОСНОВНЫЕ ПРИЗНАКИ ПОРАЖЕНИЯ КОСТЕЙ ПРИ МНОЖЕСТЕННОЙ МИЕЛОМЕ

Множественная миелома - это опухолевое заболевание в костном мозге, которое системно влияет на скелет, то есть множественные поражения могут происходить в разных местах скелета. Для количественного определения общий массы опухоли, для установления степени болезни и для подготовки соответствующей терапии, требуется объем всех поражений. Поскольку большое количество поражений у одного пациента затрудняют ручную сегментацию всех поражений, количественное определение общего объема опухоли, на сегодняшний день невозможно. Поэтому необходимо разработать